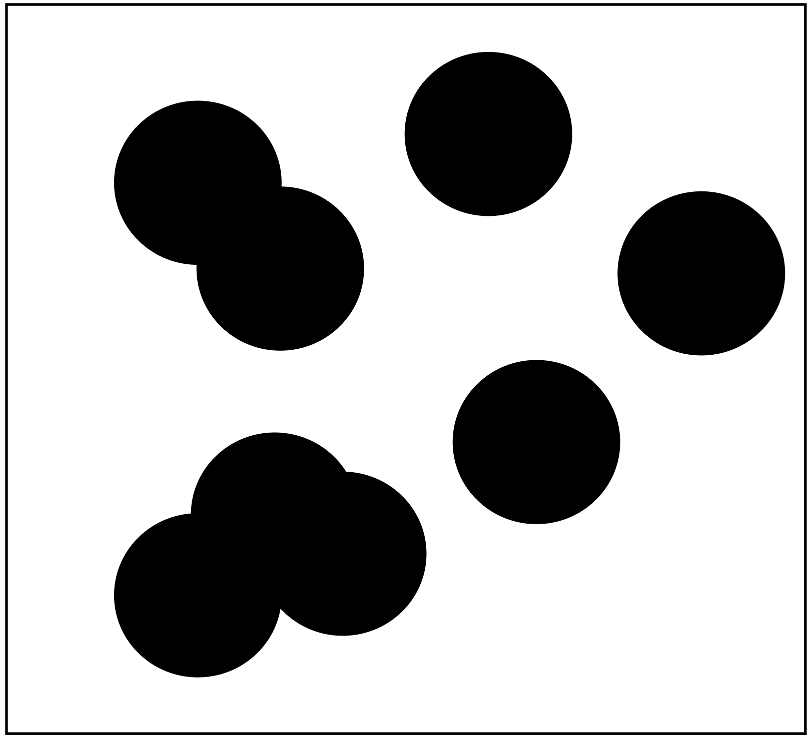
SCHEMA BOOLÉEN

COVARIANCE



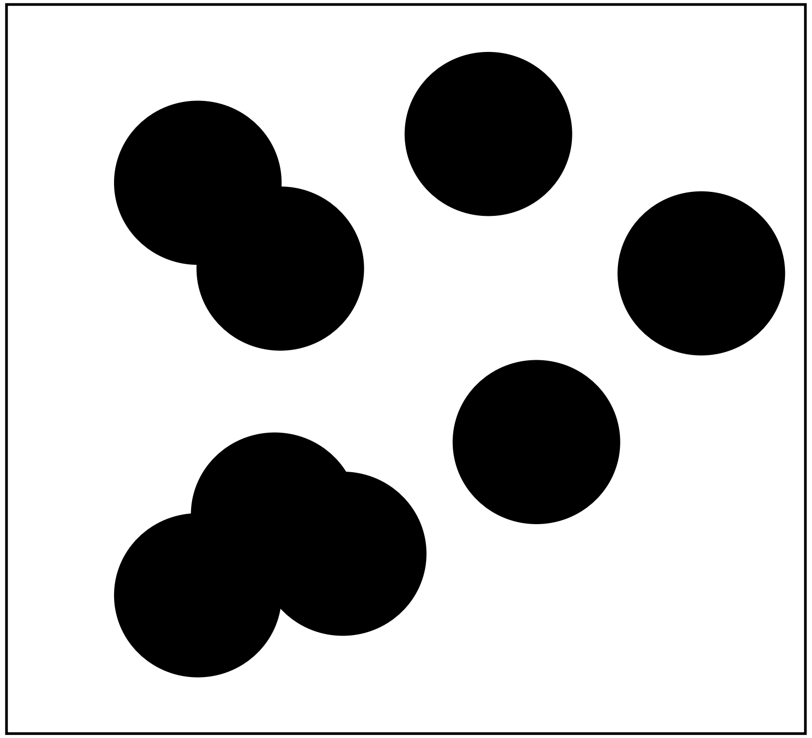
A^c : complémentaire de A (D-A)

Considérons la probabilité qu'un point aléatoire tiré dans D tombe dans A ou à l'extérieur de A

$$P\{x \in A\} = \frac{S(A)}{S(D)} = Aa$$

$$P\{x \in A^c\} = \frac{S(D-A)}{S(D)} = \frac{S(D)-S(A)}{S(D)} = 1 - Aa$$

$$P\{x \in A^c\} = \exp\left(-\theta.\bar{S}(A')\right)$$



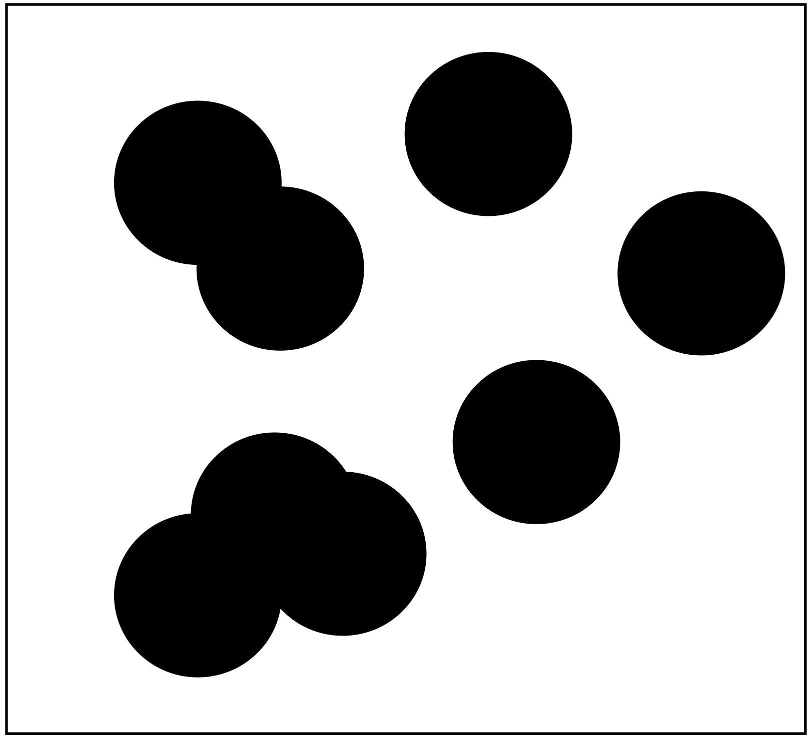
Considérons la probabilité qu'un premier point aléatoire tiré dans D tombe à l'extérieur de A et qu'un deuxième point aléatoire tiré également dans D, à une distance h du premier, tombe aussi à l'extérieur de A

Si h est grand, les probabilités entre les deux points sont indépendantes

$$Q(h) = P\left\{x \in A^c, x + h \in A^c\right\}$$

$$Q(h) = (1 - Aa)(1 - Aa)$$

$$Q(h) = q^2$$



Si ce n’est pas le cas (h petit), les probabilités entres les deux points sont liés par :
_la forme des grains A’
_la distance entre les grains A’

$$Q(h) = q^{2-r(h)}$$

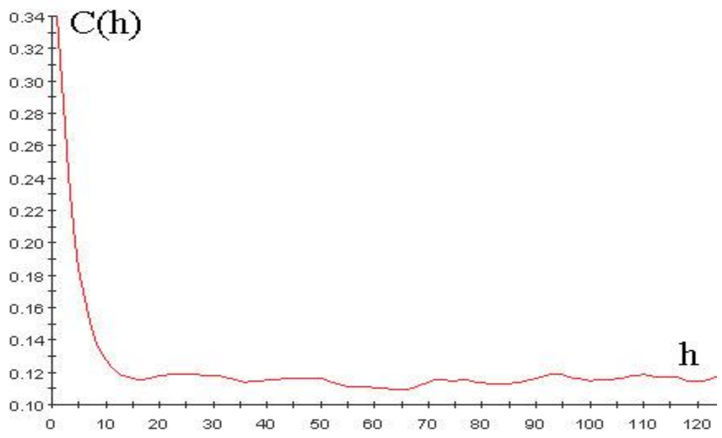
$$K(h) = \overline{S}(A' \cap A'_h), r(h) = \frac{K(h)}{K(0)}$$

COVARIANCE

- Probabilité qu’un premier point aléatoire tiré dans D tombe dans un ensemble et qu’un deuxième point aléatoire tiré également dans D, à une distance h du premier, tombe aussi dans le même ensemble
- Pour un schéma Booléen (Ө,A’), on a :

$$Q(h) = P\{x \in A^c, x+h \in A^c\} = q^{2-r(h)} \qquad K(h) = \bar{S}(A' \cap A'_h), r(h) = \frac{K(h)}{K(0)}$$

$$C(h) = P\{x \in A, x+h \in A\} = 1 - 2q + Q(h)$$

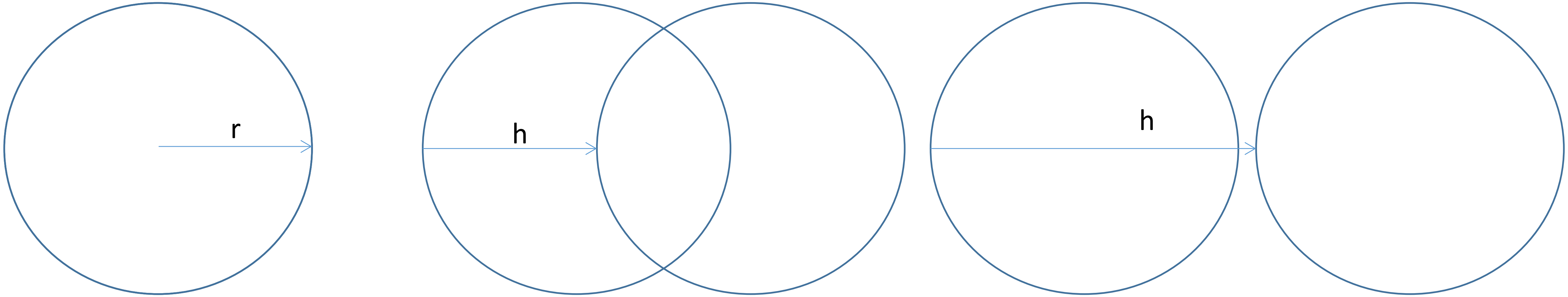


Valeurs de C(0) et C(h grand) ?

COVARIOGRAMME GÉOMÉTRIQUE

$$K(h) = \bar{S}(A' \cap A'_h)$$

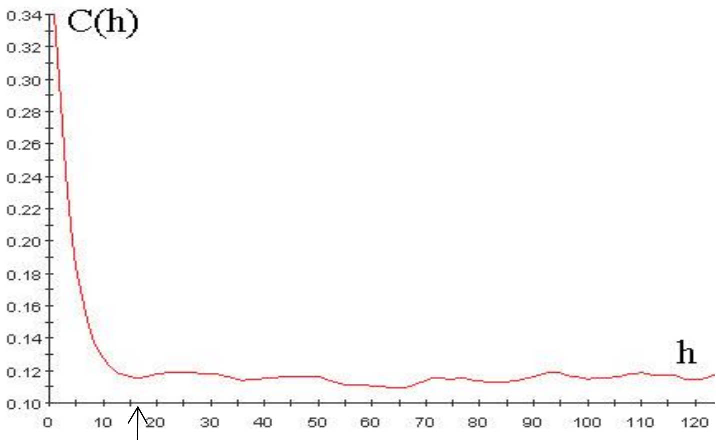
Quelques remarques :
En 0, vaut la surface moyenne de A’
Si h est supérieure au diamètre de A’, l’intersection est nulle, K vaut 0



COVARIANCE

K(h) s'annule lorsque h atteint le diamètre moyen des grains A'. C(h) se stabilise alors à la valeur $(Aa)^2$. Cette valeur pour laquelle la stabilisation est obtenue s'appelle **la portée**

Aa



$(Aa)^2$

Portée : taille moyenne des grains A'

COVARIOGRAMMES GEOMETRIQUES D'OBJET SIMPLES

Disque de rayon r: $K(h) = 2r^2\left(\arccos\left(\frac{h}{2r}\right) - \frac{h}{2r}\sqrt{1-\left(\frac{h}{2r}\right)^2}\right)$ Pour h ≤ 2r et K(h) = 0 pour h > 2r

Sphère de rayon r: $\frac{K(h)}{K(0)} = r(h) = 1 - \frac{3}{4}\frac{h}{r} + \frac{1}{16}\frac{h^3}{r^3}$ Pour h ≤ 2r

Sphère dont le rayon suit une loi exponentielle de moyenne D: $\frac{K(h)}{K(0)} = r(h) = \left(1 + \frac{h}{2D}\right)\exp\left(\frac{h}{D}\right)$ Pour h >0

DE FAÇON PLUS GÉNÉRALE

Théorème (Matheron,1975):

La capacité de Choquet d'un schéma booléen de grains primaire A' est donné dans le cas stationnaire par:

$$T(K) = 1 - Q(K) = 1 - \exp\left(-\theta \bar{\mu}_n(A' \oplus \breve{K})\right) = 1 - q^{\alpha}$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{\bar{\mu}_n(A' \oplus \breve{K})}{\bar{\mu}_n(A')} \text{ et } q = P\left\{x \in A^c\right\}$$

Capacité de Choquet T(K): "probabilité que le compact K soit totalement inclus dans un ensemble"

Pour la covariance : on considère K=bi-points

→ on peut utiliser d'autres compacts (des segments, des disques...) mais l'expression analytique est alors moins simple ...

* G. Matheron, Random sets and integral geometry, Wiley, New York, 1975

SCHÉMA BOOLÉEN ET STÉRÉOLOGIE

De par sa définition à partir d'un processus de points de Poisson et implantation d'objets, nous avons les propriétés suivantes si observation d'un schéma booléen 3D par une coupe 2D infiniment mince :

$$Aa = Vv$$